实分析讲义

ElegantLATEX Program

前言

2020-2021 研究生课程《实分析》讲义。

曹军

2020 年 1 月

目录

第一章 Sobolev 函数

1.1 定义与基本性质

在本节中，设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为一个开集.

定义 1.1. 弱导数

设 $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$ 为 U 上的局部可积函数，$1 \le i \le n$，称 $g_i \in L^1_{\text{loc}}(U)$ 为 f 在 U 上关于 x_i 的**弱导数**，若对任意的 $\varphi \in C_c^1(U)$，有

$$\int_U f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx = -\int_U g_i\varphi\,dx. \tag{1.1}$$

此时，记 $g_i := \frac{\partial f}{\partial x_i}$，并记 $Df := (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ 为 f 的**梯度向量**.

定义 1.2. Sobolev 空间

设 $1 \le p \le \infty$.

(i) 称 $f \in W^{1,p}(U)$，若 $f \in L^p(U)$ 且对任意 $1 \le i \le n$，其弱导数 $g_i \in L^p(U)$;

(ii) 称 $f \in W^{1,p}_{\text{loc}}(U)$，若对任意 $V \subset\subset U$，有 $f \in W^{1,p}(V)$;

(iii) 称 f 为一个 **Sobolev 函数**，若存在 $1 \le p \le \infty$，使得 $f \in W^{1,p}_{\text{loc}}(U)$.

(iv) 对任意 $f \in W^{1,p}(U)$，定义其范数如下

$$\|f\|_{W^{1,p}(U)} := \begin{cases} \left[\int_U |f(x)|^p + |Df(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup_{x\in U}\left[|f(x)| + |Df(x)|\right], & p = \infty. \end{cases}$$

注 设 f 为一个 Sobolev 函数，由定义知存在 $p \in [1,\infty)$ 使得，$f \in W^{1,p}_{\text{loc}}(U)$，从而对任意 $V \subset\subset U$，$f \in W^{1,p}(V)$，且 f 在 V 上存在弱导数 $\frac{\partial}{\partial x_j}f$，其中 $j \in \{1,\dots,n\}$. 因此对任意 $\varphi \in C_c^1(U)$，由于 $\operatorname{supp}\varphi$ 紧，知存在开集 $V \subset\subset U$ 满足 $\operatorname{supp}\varphi \subset V$，故根据弱导数定义(1.1)，

$$\int_U f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx = -\int_U g_i\varphi\,dx. \tag{1.2}$$

这说明，上述**分部积分公式**对任意的 Sobolev 函数都成立。

定义 1.3. 收敛

设 $\{f_k\}_{j\in\mathbb{N}}$ 与 f 为 Sobolev 函数.

(i) 称 $f_k \to f$ in $W^{1,p}(U)$，若当 $k \to \infty$ 时，

$$\|f_k - f\|_{W^{1,p}(U)} \to 0;$$

(ii) 称 $f_k \to f$ in $W^{1,p}_{loc}(U)$，若对任意的 $V \subset\subset U$，有当 $k \to \infty$ 时，

$$\|f_k - f\|_{W^{1,p}(V)} \to 0.$$

定义 1.4. 磨光

设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中一个开集.

(i) 对任意 $\epsilon > 0$, 令 $U_\epsilon := \{x \in U : \operatorname{dist}(x, \partial U) > \epsilon\}$.

(ii) 令 $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 定义如下

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

其中常数 $C > 0$ 满足 $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\, dx = 1$. 对任意 $\epsilon > 0$, 定义

$$\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

(iii) 对任意 $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$ 及 $x \in U_\epsilon$, 定义

$$f^\epsilon(x) := \eta_\epsilon * f(x) = \int_U \eta_\epsilon(x-y) f(y)\, dy. \tag{1.3}$$

♣

定理 1.1. 磨光逼近

设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，η 为一个磨光子，$f \in L^1_{\text{loc}}(U)$. 则如下结论成立.

(i) 对任意 $\epsilon > 0$, $f^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$;

(ii) 若 $f \in C(U)$，则当 $\epsilon \to 0$ 时，$f^\epsilon \to f$, 在 U 中任意紧子集上一致收敛;

(iii) 若 $f \in L^p_{\text{loc}}(U)$, 其中 $p \in [1, \infty)$, 则当 $\epsilon \to 0$ 时，$f^\epsilon \to f$ in $L^p_{\text{loc}}(U)$.

(iv) 若 $x \in U$ 为 f 的 Lebesgue 点，则当 $\epsilon \to 0$ 时，$f^\epsilon(x) \to f(x)$, 点态收敛. 特别地，$f^\epsilon \to f$, 在 Lebesgue 测度 $\mathcal{L}^n$ 下几乎处处收敛;

(v) 若 $f \in W^{1,p}_{\text{loc}}(U)$, 其中 $p \in [1, \infty]$, 则对任意 $\epsilon > 0$ 和 $j \in \{1, \ldots, n\}$, 有

$$\frac{\partial f^\epsilon}{\partial x_j} = \eta_\epsilon * \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

在 U_ϵ 上点态成立;

(vi) 若 $f \in W^{1,p}_{\text{loc}}(U)$, 其中 $p \in [1, \infty)$, 则当 $\epsilon \to 0$ 时，$f^\epsilon \to f$ in $W^{1,p}_{\text{loc}}(U)$.

♡

证明 **Step1: (i) 的证明.** 固定 $x \in U_\epsilon$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. 令 $e_j = \{0, \ldots, 1, \ldots, 0\}$ 为单位向量. 由 U_ϵ 为开集知，当 $h > 0$ 充分小时，$x + he_j \in U_\epsilon$.

考虑差商，由磨光的定义(1.3)知

$$\begin{aligned} \frac{f^\epsilon(x+he_j) - f^\epsilon(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\int_U \eta_\epsilon(x+he_j-y) f(y)\, dy - \int_U \eta_\epsilon(x-y) f(y)\, dy\right] \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_U \frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_j-y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right] f(y)\, dy. \end{aligned}$$

注意到

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_j-y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right] = \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) = \epsilon^n \frac{\partial \eta_\epsilon}{\partial x_j}(x-y),$$

以及对任意 $h > 0$ 充分小，

$$\left|\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_j-y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right] f(y)\right| \leq \frac{1}{\epsilon}\|D\eta\|_{L^\infty(U)} |f(y)| \in L^1_{\text{loc}}(U).$$

因此，由控制收敛定理知，

$$\frac{\partial f^\epsilon}{\partial x_j}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f^\epsilon(x+he_j)-f^\epsilon(x)}{h}=\int_U\frac{\partial\eta_\epsilon}{\partial x_i}(x-y)f(y)\,dy.$$

这说明 $f^\epsilon\in C^1(U_\epsilon)$. 类似可证明 f^ϵ 的其它阶导数也存在，从而 $f^\epsilon\in C^\infty(U_\epsilon)$.

Step 2: (ii) 的证明. 设 $f\in C^1(U)$. 任取 U 的紧子集 V，知存在开集 W 满足 $V\subset W\subset\subset U$, 从而 f 在 W 上一致连续. 因此对任意 $x\in V$, 利用变量替换公式知

$$f^\epsilon(x)=\frac{1}{\epsilon^n}\int_{B(x,\epsilon)}\eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)f(y)\,dy=\int_{B(0,1)}\eta(z)f(x-\epsilon z)\,dz. \tag{1.4}$$

由此及 $\int_{B(0,1)}\eta(z)\,dz=1$ 知

$$|f^\epsilon(x)-f(x)|\le\int_{B(0,1)}\eta(z)\,|f(x-\epsilon z)-f(x)|\;dx.$$

当 ϵ 充分小时, $x,x-\epsilon z\in W$, 由此及 f 在 W 上一致连续知 $f^\epsilon\to f$ 在 V 上一致收敛.

Step 3: (iii) 的证明. 设 $f\in L^p_{\rm loc}(U)$, 则对任意 $V\subset\subset W\subset\subset U$, $x\in V$ 以及 $\epsilon>0$ 充分小, 对 $1\le p<\infty$ 分两种情况.

情形 1: 当 $1<p<\infty$ 时. 此时对任意 $x\in V$, 由(1.4)，知

$$\begin{aligned}|f^\epsilon(x)|&\le\int_{B(0,1)}\eta^{1-1/p}(z)\eta^{1/p}(z)\,|f(x-\epsilon z)|\;dz\\&\le\left(\int_{B(0,1)}\eta(z)\,dz\right)^{1/p'}\left(\int_{B(0,1)}\eta(z)\,|f(x-\epsilon z)|^p\;dz\right)^{1/p}\\&=\left(\int_{B(0,1)}\eta(z)\,|f(x-\epsilon z)|^p\;dz\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

因此, 由于当 $\epsilon>0$ 充分小时, $x-\epsilon z\in W$, 可知

$$\begin{aligned}\|f^\epsilon\|^p_{L^p(V)}&\le\int_V\left[\int_{B(0,1)}\eta(z)\,|f(x-\epsilon z)|^p\;dz\right]\,dx\\&=\int_{B(0,1)}\eta(z)\left[\int_V|f(x-\epsilon z)|^p\;dx\right]\,dz\\&\le\int_W|f(y)|^p\;dy.\end{aligned} \tag{1.5}$$

现对任意 $\delta>0$ 充分小, 由于 $f\in L^p(W)$, 知存在 $g\in C(\overline{W})$, 使得

$$\|f-g\|_{L^p(W)}<\delta.$$

由此及(1.5)知 $\|f^\epsilon-g^\epsilon\|<\delta$. 从而

$$\|f^\epsilon-f\|_{L^p(V)}\le\|f^\epsilon-g^\epsilon\|_{L^p(V)}+\|g^\epsilon-g\|_{L^p(V)}+\|g-f\|_{L^p(V)}\le\delta.$$

这说明 $f^\epsilon\to f$ in $L^p_{\rm loc}(U)$.

情形 2: p=1 的情形类似，细节略去。

Step 4: (iv) 的证明. 设 $f\in L^1_{\rm loc}(U)$ 且 $x\in U$ 为 f 的一个 Lebesgue 点，易知

$$\begin{aligned}|f^\epsilon(x)-f(x)|&\le\frac{1}{\epsilon^n}\int_{B(x,\epsilon)}\eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)|f(x)-f(y)|\;dy\\&\le C\,\|\eta\|_{L^\infty}\frac{1}{|B|}\int_{B(x,\epsilon)}|f(y)-f(x)|\;dy.\end{aligned}$$

由于 x 为 Lebesgue 点知，最后一项随着 $\epsilon\to 0$ 而趋于 0. 从而 $f^\epsilon(x)\to f(x)$, 点态收敛.

Step 5: (v) 的证明. 设 $f\in W^{1,p}_{\text{loc}}(U)$，$1\le p\le\infty$，知对任意 $j\in\{1,\dots,n\}$, f 存在弱导数 $\frac{\partial f}{\partial x_j}$. 利用弱导数的定义知对任意 $\epsilon>0$ 与 $x\in U_\epsilon$，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f^\epsilon}{\partial x_j}(x) &= \int_U \frac{\partial \eta_\epsilon}{\partial x_j}(x-y)f(y)\,dy\\
&= -\int_U \frac{\partial \eta_\epsilon}{\partial y_j}(x-y)f(y)\,dy\\
&= \int_U \eta_\epsilon(x-y)\frac{\partial f}{\partial y_j}(y)\,dy\\
&= \eta_\epsilon * \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).
\end{aligned}
$$

Step 6: (vi) 的证明. (vi) 可由 (v) 与 (iii) 联立证明.

定理 1.2. 光滑函数的局部逼近

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 为一个开集, $f\in W^{1,p}(U)$, $(1\le p<\infty)$. 则存在函数列 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset W^{1,p}(U)\cap C^\infty(U)$ 使得

$$f_k\to f \ \text{ in } W^{1,p}(U).$$

♡

证明 **Step 1: 环形分解.** 固定 $\epsilon>0$, 定义 $U_0:\emptyset$ 且对任意 $k\in\mathbb{N}$, 定义

$$U_k:=\{x\in U:\ \operatorname{dist}(x,\partial U)>\frac{1}{k}\}\cap B(0,k).$$

令 $V_k:=U_{k+1}\setminus\overline{U}_{k-1}$. 取 $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为光滑函数列满足如下条件:

a. 对任意 $k\in\mathbb{N}$，$\xi_k\in C_c^\infty(V_k)$ 且 $0\le\xi_k\le 1$;

b. $\sum_{k\in\mathbb{N}}\xi_k\equiv 1$ on U.

由此可得对任意 $k\in\mathbb{N}$, $f\xi_k\in W^{1,p}(U)$ 且 $\operatorname{supp}(f\xi_k)\subset V_k$. 因此, 应用磨光逼近定理1.1(vi)，知对任意 $\epsilon>0$，存在 $\epsilon_k>0$ 充分小，使得

- $\operatorname{supp}\,(\eta_{\epsilon_k}*(f\xi_k))\subset V_k$;
- $\|\eta_{\epsilon_k}*(f\xi_k)-f\xi_k\|_{L^p(U)}<\frac{\epsilon}{2^k}$;
- $\|\eta_{\epsilon_k}*D(f\xi_k)-D(f\xi_k)\|_{L^p(U)}<\frac{\epsilon}{2^k}$;
- $f=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f\xi_k$.

Step 2: 磨光逼近. 对任意 $\epsilon>0$ 充分小，令

$$f_\epsilon:=\sum_{k=1}^{\infty}\eta_{\epsilon_k}*(f\xi_k)\,.$$

对任意 $x\in U$, 由存在 x 的邻域 U_x，使得上述求和在 U_x 上只有有限项非零, 因此 $f_\epsilon\in C^\infty(U)\cap W^{1,p}(U)$.

另一方面, 考虑

$$
\begin{aligned}
&\|f_\epsilon-f\|_{L^p(U)}+\|D(f_\epsilon-f)\|_{L^p(U)}\\
&\quad\le\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\|\eta_{\epsilon_k}*(f\xi_k)-(f\xi_k)\|_{L^p(U)}+\|\eta_{\epsilon_k}*D(f\xi_k)-D(f\xi_k)\|_{L^p(U)}\Big]<\epsilon.
\end{aligned}
$$

这说明 $f_{\epsilon_k}\to f$ in $W^{1,p}(U)$.

定义 1.5. Lipschitz 边界

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为一个开集, ∂U 为其边界. 称 ∂U 是 **Lipschitz 的**, 若对任意 $x \in \partial U$, 存在 $r > 0$ 与一个 Lipschitz 映射 $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 使得 (在相差一个旋转和坐标重排下),

$$U \cap Q(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \gamma(y_1, \dots, y_{n-1} < y_n)\} \cap Q(x,r),$$

其中 $Q(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \ |y_j - x_j| < r, j = 1, \dots, n\}$ 为一个中心在 x, 边长为 $2r$ 的方体. ♣

定理 1.3. 光滑函数的整体逼近

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为一个有界开集, 满足 ∂U 为 Lipschitz. 若 $f \in W^{1,p}(U)$, $(1 \le p < \infty)$, 则存在函数列 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(U) \cap C^\infty(\overline{U})$ 使得 $f_k \to f$ in $W^{1,p}(U)$. ♡

证明 **Step 1: 函数在小方体的平移.** 对任意 $x \in \partial U$, 令 $r > 0$ 和 $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 为 Lipschitz 边界定义中的边长与映射, 记 $Q := Q(x,r)$ 和 $Q' := Q(x, r/2)$.

先假设 f 在 $\partial Q' \cap U$ 的一个小邻域上为 0, 则对任意 $y \in \overline{U \cap Q'}$, $\epsilon > 0$ 与 $\alpha > 0$, 令 $y^\epsilon := y + \epsilon\alpha e_n$ 为 y 沿着 e_n 方向的一个平移. 易知当 ϵ 充分小时, 有 $B(y^\epsilon, \epsilon) \subset U \cap Q$. 对任意 $y \in U \cap Q'$, 定义

$$f_\epsilon(y) := \frac{1}{\epsilon^n} \int_U \eta(z/\epsilon) f(y^\epsilon - z)\, dz \tag{1.6}$$

$$= \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B(y^\epsilon,\epsilon)} \eta\left(\frac{y-w}{\epsilon} + \alpha e_n\right) f(w)\, dw. \tag{1.7}$$

易知 f_ϵ 满足如下性质:

a. $f_\epsilon \in C^\infty(\overline{U \cap Q'})$;

b. $f_\epsilon \to f$ in $W^{1,p}(U \cap Q')$.

进一步, 由假设: $f \equiv 0$ 在 $\partial Q' \cap U$ 的一个小邻域, 知当 $\epsilon > 0$ 充分小时, $f_\epsilon \equiv 0$ 在 $\partial Q' \cap U$ 的一个小邻域成立. 由此可知, 此时 f_ϵ 可零延拓至 $U \setminus Q'$.

Step 2: 构造有限单位分解. 由 ∂U 为紧集, 知在 Lipschitz 边界的定义中, 存在有限 (不妨设为 N) 个方体 $Q(x_j, r_j)$,$j = 1, \dots, N$, 使得

$$\partial U \subset \bigcup_{j=1}^N Q(x_j, r_j/2).$$

令 $\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 为光滑函数列, 满足对任意 $j \in \{1, \dots, n\}$,

- $\operatorname{supp} \xi_j \subset Q_j'$, $0 \le \xi_j \le 1$;
- $\operatorname{supp} \xi_0 \subset U$, $0 \le \xi_0 \le 1$;
- $\sum_{j=0}^N \xi_j = 1$ on U.

对任意 $j \in \{1, \dots, N\}$, 令 $f^j := f\xi_j$. 对任意充分小 $\delta > 0$, 构造形如(1.6) 的平移函数 $g^j := (f^j)_{\epsilon_j} \in C^\infty(\overline{U})$ 使得 $\operatorname{supp} g^j \subset \overline{U} \cap Q_j$

$$\|g^i - f^i\|_{W^{1,p}(U \cap Q_j)} < \frac{\delta}{2}.$$

对 $j = 0$, 令 g^0 为局部逼近定理1.1中逼近函数满足 $g^0 \in W^{1,p}(U) \cap C^\infty(U)$ 使得

$$\|g^0 - f^0\|_{W^{1,p}(U)} < \delta/2.$$

令 $g := \sum_{i=0}^{N} g^9 \in C^\infty(\overline{U})$, 知

$$\|f-g\|_{W^{1,p}(U)} \le \|f^0-g^0\|_{W^{1,p}(U)} + \sum_{j=1}^{N} \|f^j-g^j\|_{W^{1,p}(U)} < \delta.$$

定理 1.4. 乘积与链式法则

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为一个开集，$1 \le p < \infty$. 则如下性质成立.

(i) **(乘法法则)** 若 $f, g \in W^{1,p}(U) \cap L^\infty(U)$, 则 $fg \in W^{1,p}(U) \cap L^\infty(U)$ 且对任意 $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} g + f \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

依 Lebesgue 测度 $\mathcal{L}^n$-a.e. 成立;

(ii) **(链式法则)** 若 $f \in W^{1,p}(U)$，$F \in C^1(\mathbb{R})$ 满足 $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$ 且 $F(0)=0$. 则 $F(f) \in W^{1,p}(U)$ 且对任意 $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\frac{\partial F(f)}{\partial x_j} = F'(f) \frac{\partial f}{\partial x_j};$$

(iii) **(正负部弱导数)** 若 $f \in W^{1,p}(U)$, 则 $f^+, f^-, |f| \in W^{1,p}(U)$ 且

$$Df^+ = \begin{cases} Df, & \mathcal{L}^n - a.e. \text{ on } \{f > 0\} \\ 0, & \mathcal{L}^n - a.e. \text{ on } \{f \le 0\}, \end{cases}$$

$$Df^- = \begin{cases} 0, & \mathcal{L}^n - a.e. \text{ on } \{f \ge 0\} \\ Df, & \mathcal{L}^n - a.e. \text{ on } \{f < 0\}, \end{cases}$$

$$D|f| = \begin{cases} Df, & \mathcal{L}^n - a.e. \text{ on } \{f > 0\} \\ 0, & \mathcal{L}^n - a.e. \text{ on } \{f = 0\} \\ -Df, & \mathcal{L}^n - a.e. \text{ on } \{f < 0\}. \end{cases}$$

特别地, $Df = 0$ 在 $\{f=0\}$ 上 $\mathcal{L}^n$-a.e. 成立.

♡

证明 **Step 1: (i) 的证明.** 取 $\varphi \in C_c^1(U)$, 满足 $\operatorname{supp}\varphi \subset V \subset\subset U$. 对任意 $\epsilon > 0$ 充分小，令

$$f^\epsilon := \eta_\epsilon * f \quad 和 \quad g^\epsilon := \eta_\epsilon * g.$$

知

$$\begin{aligned}\int_U fg \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx &= \int_V fg \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_V f^\epsilon g^\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx \\ &= -\lim_{\epsilon \to 0} \int_V \left[\frac{\partial f^\epsilon}{\partial x_j} g^\epsilon + f^\epsilon \frac{\partial g^\epsilon}{\partial x_j} \right] \varphi\, dx.\end{aligned}$$

由 $f^\epsilon \to f$, $g^\epsilon \to g$ in $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(U)$，以及 $f^\epsilon, g^\epsilon \in L^\infty(U)$，并应用控制收敛定理，知上式等于

$$-\int_V \left[\frac{\partial f}{\partial x_j} g + f \frac{\partial g}{\partial x_j}\right] \varphi \, dx.$$

由弱导数定义，这说明 $fg \in W^{1,p}(U) \cap L^\infty(U)$ 且

$$\frac{\partial (fg)}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} g + f \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

依 Lebesgue 测度 $\mathcal{L}^n$-a.e. 成立.

Step 2: (ii) 的证明. 设 $F \in C^1(\mathbb{R})$ 满足 $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$ 且 $F(0) = 0$. 易知 $\lim_{\epsilon \to 0} F(f^\epsilon) = F(f)$ 点态 $\mathcal{L}^n$-a.e. 成立. 进一步，类似于 Step2, 取 φ, f^ϵ 以及 V, 利用控制收敛定理知对任意 $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}
\int_U F(f) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx &= \int_V F(f) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_V F(f^\epsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \\
&= -\lim_{\epsilon \to 0} \int_V F'(f^\epsilon) \frac{\partial f^\epsilon}{\partial x_j} \varphi dx \\
&= -\int_V F'(f) \frac{\partial f^\epsilon}{\partial x_j} \varphi dx \\
&= -\int_U F'(f) \frac{\partial f^\epsilon}{\partial x_j} \varphi dx.
\end{aligned}$$

这说明 $F(f) \in W^{1,p}(U)$ 且 $\frac{\partial F(f)}{\partial x_j} = F'(f) \frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Step 3: (iii) 和 (iv) 的证明. 对任意 $\epsilon > 0$ 充分小, 定义

$$F_\epsilon(r) := \begin{cases} \left(r^2 + \epsilon^2\right)^{1/2} - \epsilon, & r \geq 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases}$$

易知 $F_\epsilon \in C^1(\mathbb{R})$, $\lim_{\epsilon \to 0} F_\epsilon(f) \to f^+$ 点态收敛，且 $F'_\epsilon(r) = \frac{1}{2}\left(r^2 + \epsilon^2\right)^{-1/2} \mathbf{1}_{\{r \geq 0\}} \in L^\infty(\mathbb{R})$. 因此，应用 (ii) 知，对任意 $\varphi \in C^1_c(U)$ 有，

$$\int_U F_\epsilon(f) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_U F'_\epsilon(f) \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi \, dx.$$

令 $\epsilon \to 0$, 得

$$\int_U f^+ \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx = -\int_{U \cap \{f > 0\}} \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi dx.$$

这说明 $f^+ \in W^{1,p}(U)$ 且 $\frac{\partial f^+}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \mathbf{1}_{\{f>0\}}$ $\mathcal{L}^n$-a.e. 意义下成立.

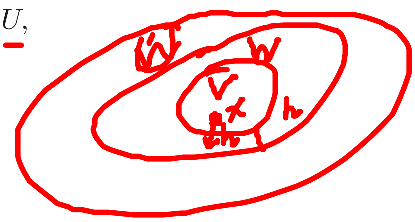
f^-,$|f|$ 和 (iv) 的情形类似，细节略去.

定理 1.5. Sobolev 与 Lipscthiz 函数

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为一个开集，$f : U \to \mathbb{R}$ 为一个 U 上的函数. 则 f 在 U 内局部 Lipschitz 当且仅当 $f \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(U)$.

证明 **Step1: Lipschitz 到 Sobolev.** 假设 f 在 U 内局部 Lipschitz, 对任意 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 以及

$$V \subset\subset W \subset\subset U,$$



取 $0 < h < \mathrm{dsit}(V, \partial W)$ 并对任意 $x \in V$, 定义 CW

$$g_j^h(x) := \frac{f(x+he_j) - f(x)}{h}.$$

$\sup_{n\in N}\{\varphi_n\}$

知

$$\sup_{0<h<\mathrm{dsit}(V,\partial W), x\in V} \left| g_j^h(x) \right| \leq \mathrm{Lip}\,(f|_W) < \infty.$$

从而对任意 $p \in (1, \infty)$, 有

$$\sup_{0<h<\mathrm{dsit}(V,\partial W)} \left\| \left| g_j^h \right| \right\|_{L^p(V)} < \infty.$$

根据 $L^p(V)$ 的弱紧性知，存在子序列 $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 以及 $g_j \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(U)$, 满足 $\lim_{k\to\infty} h_k = 0$ 以及

$$g_j^{h_k} \rightharpoonup g_j$$

在 $L^p(V)$ 中弱收敛. 因此，对任意 $\varphi \in C_c^1(V)$ 以及 $j \in \{1, \ldots, n\}$, 有

$$\int_U f(x) \frac{\varphi(x+h_k e_j) - \varphi(x)}{h_k}\, dx = -\int_U g_j^{h_k} \varphi(x+h_k e_j)\, dx.$$

令 $k \to \infty$，得

$$\int_U f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx = -\int_U g_j \varphi(x)\, dx.$$

这说明 g_j 为 f 关于 x_j 的弱导数, 从而 $f \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(U)$.

Step 2: Sobolev 到 Lipschitz. 设 $f \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(U)$. 令 $B \subset\subset U$ 为 U 中任意闭球，取 $\epsilon_0 > 0$ 充分小，知

$$\sup_{0<\epsilon<\epsilon_0} \|Df^\epsilon\|_{L^\infty(B)} < \infty.$$

又由于 $f^\epsilon \in C^\infty(B)$, 知对任意 $x, y \in B$,

$$f^\epsilon(x) - f^\epsilon(y) = \int_0^1 Df^\epsilon\,(y + t(x-y))\, dt(x-y).$$

从而 $|f^\epsilon(x) - f^\epsilon(y)| \lesssim |x-y|$. 令 $\epsilon \to 0$, 得 f 为局部 Lipschitz.

1.2 Sobolev 函数的迹与延拓

定理 1.6. 迹定理

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为一个有界开集，其边界 ∂U 为 Lipschitz 光滑，且 $1 \le p < \infty$. 则如下结论成立.

(i) 存在有界线性算子 $T: W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U, \mathcal{H}^{n-1})$ 使得对任意 $f \in W^{1,p}(U) \cap C^1(\overline{U})$，有 $Tf = f$ on ∂U；

(ii) 对任意 $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ 与 $f \in W^{1,p}(U)$, 有

$$\int_U f \mathrm{div}\varphi \, dx = -\int_U Df \cdot \varphi \, dx + \int_{\partial U} (\varphi \cdot \nu) Tf \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

其中 ν 为 ∂U 上的单位外法向量.

♡

定义 1.6. Sobolev 函数的迹

给定 $f \in W^{1,p}(U)$，上述定理中的函数 Tf 称为函数 f 在 ∂U 上的**迹**.

♣

证明 [迹定理的证明]

Step 1: 外法向量估计. 假设$f \in C^1(\overline{U})$. 由 ∂U 为 Lipschitz，知对任意 $x \in U$, 存在 $r > 0$ 以及 Lipschitz 函数 $\gamma: \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 满足在相差旋转和坐标重排下,

$$U \cap Q(x,r) = \{y: \gamma(y_1, \ldots, y_{n-1}) < y_n\} \cap Q(x,r).$$

进一步, **假设**$f \equiv 0$ on $U \setminus Q$, 设 ν 为定义在 $Q \cap \partial U$ 上的单位外法向量, 知

$$\nu = \frac{(\nabla_{y'}\gamma(y'), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla_{y'}\gamma(y')|^2}},$$

其中 $y' := (y_1, \ldots, y_{n-1})$. 从而由 γ 为 Lipschitz 函数, 知

$$-e_n \cdot \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_{y'}\gamma(y')|^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{1 + (\mathrm{Lip}(\gamma))^2}} > c_0 \tag{1.8}$$

在 $Q \cap \partial U$ 上依 $\mathcal{H}^{n-1}$-a.e. 成立, 其中 $c_0 > 0$ 为一个正常数.

Step 2: $f \in C^1(\overline{U})$ 且 $f \equiv 0$ on $U \setminus Q$.

固定 $\epsilon > 0$, 对任意 $t \in \mathbb{R}$, 令

$$\beta_\epsilon(t) := \left(t^2 + \epsilon^2\right)^{1/2} - \epsilon.$$

易知 $\beta_\epsilon(t)$ 随着 $\epsilon \to 0$ 单调递增趋于 $|t|$. 进一步, 由于 $\beta_\epsilon'(t) = t(t^2 + \epsilon^2)^{-1/2}$, 知 $|\beta_\epsilon'| < 1$.

回顾 **Gauss-Green 公式**. 即对任意有界集合 $E \subset \mathbb{R}^n$, 以及 $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ 有

$$\int_E \mathrm{div}\varphi \, dx = \int_{\partial E} \varphi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{1.9}$$

利用(1.9), 并根据 $f \equiv 0$ on $U \setminus Q$, 可得

$$\begin{aligned}\int_{\partial U} \beta_\epsilon(f)\, d\mathcal{H}^{n-1} &= \int_{\partial U \cap Q} \beta_\epsilon(f)\, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq C \int_{\partial U \cap Q} \beta_\epsilon(f)(-e_n \cdot \nu)\, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= -C \int_{U \cap Q} \frac{\partial}{\partial y_n} (\beta_\epsilon(f))\, dy \\ &= -C \int_{U \cap Q} \beta'_\epsilon(f) \frac{\partial f}{\partial y_n}\, dy.\end{aligned}$$

由此可知

$$\int_{\partial U} \beta_\epsilon(f)\, d\mathcal{H}^{n-1} \leq C \int_{U \cap Q} |\beta'_\epsilon(f)|\, |D(f)|\, dy \leq C \int_U |D(f)|\, dy.$$

进一步, 令 $\epsilon \to 0$, 得

$$\int_{\partial U} |f|\, d\mathcal{H}^{n-1} \leq C \int_U |D(f)|\, dy.$$

Step 2: $f \in C^1(\overline{U})$**.** 此时将 ∂U 用有限个在 Lipschitz 边界中定义的方体覆盖, 并使用单位分解, 得

$$f = \sum_{i=1}^N f^i = \sum_{i=1}^N f \xi_i,$$

其中每一个 f^i 满足 Step 2 中条件. 因此, 应用 Step 2 中结论, 并利用 Gauss-Green 定理得

$$\begin{aligned}\int_{\partial U} |f|\, d\mathcal{H}^{n-1} &= \sum_{i=1}^N \int_{\partial U} |f^i|\, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{(\partial U \cap Q_i) \cup (U \cap \partial Q_i)} |f^i|\, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= C \sum_{i=1}^N \int_{(\partial U \cap Q_i) \cup (U \cap \partial Q_i)} (0, \ldots, 0, -|f^i|) \cdot \nu\, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= C \sum_{i=1}^N \int_{U \cap Q_i} \left[-\frac{\partial |f^i|}{\partial x_i} \xi_i - \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} |f| \right] dy \\ &= C \sum_{i=1}^N \int_{U \cap Q_i} [|Df| + |f|]\, dy.\end{aligned}$$

类似地, 对任意 $1 < p < \infty$, 用 $|f|^p$ 代替 $|f|$ 并重复上面讨论, 可得

$$\int_{\partial U} |f|^p\, \mathcal{H}^{n-1} \leq C \int_U [|Df|^p + |f|^p]\, dy.$$

Step 4: $f \in W^{1,p}(U)$**.** 此时根据整体逼近定理, 取 $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset W^{1,p}(U) \cap C^1(\overline{U})$, 定义迹算子为

$$T(f) := \lim_{j \to \infty} f_j|_{\partial U}.$$

由 Step 3 中结果, 知 T 可延拓为从 $W^{1,p}(U)$ 到 $L^p(\partial U, \mathcal{H}^{n-1})$ 有界的线性算子.

定理 1.7. 延拓定理

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为一个有界开集, 其边界 ∂U 为 Lipschitz 光滑, 且 $1 < p < \infty$, 且存在开集 V 满足 $U \subset\subset V$. 则存在一个有界线性算子 $E: W^{1,p}(U) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 使得对任意 $f \in W^{1,p}(U)$, 有

(i) $\operatorname{supp} Ef \subset V$;

(ii) $Ef = f$ on U.

定义 1.7. Sobolev 函数的延拓

给定 $f \in W^{1,p}(U)$, 上述定理中的函数 Ef 称为函数 f 的**延拓**.

证明 [延拓定理的证明] **Step 1: 构造圆柱体.** 给定 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 记 $x = (x', x_n)$, 其中 $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n \in \mathbb{R}$. 对任意 $r, h > 0$, 定义开圆柱体 $C(x, r, h)$ 如下

$$C(x,r,h) := \left\{y \in \mathbb{R}^n : \ |y' - x'| < r, |y_n - x_n| < h\right\}.$$

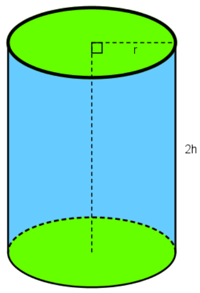


图 1.1: 开圆柱体

由于 ∂U 为 Lipschitz, 知对任意 $x \in \partial U$, 存在 $r, h > 0$ 以及一个 Lipschitz 函数 $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 使得

- $\max\limits_{|x'-y'|<r} |\gamma(y') - x_n| < h/4$;
- $U \cap C(x,r,h) = \{y : \ |x' - y'| < r, \gamma(y') < y_n < x_n + h\}$;
- $C(x,r,h) \subset V$.

令 $C := (x,r,h)$, $C' := C(x, r/2, h/2)$, $U^+ := C' \cap U$, $U^- := C' \setminus \overline{U}$. 如下图.

Step 2: 局部对称延拓. 设 $f \in C^1(\overline{U})$, 满足 $\operatorname{supp} f \subset C' \cap \overline{U}$. 定义如下两个函数

$$\begin{cases} f^+(y) := f(y) & \text{if } y \in \overline{U}^+; \\ f^-(y) := f(y', 2\gamma(y') - y_n) & \text{if } y \in \overline{U}^-. \end{cases}$$

易知 $f^+ = f^-$ on $\partial U \cap C'$. 进一步, $f^- \in W^{1,p}(U^-)$ 且

$$\|f^-\|_{W^{1,p}(U^-)} \le C\|f\|_{W^{1,p}(U)}. \tag{1.10}$$

事实上, 设 $\varphi \in C_c^1(U^-)$, 取 $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ 为一列 C^∞ 函数列, 满足

- $\gamma_k \ge \gamma$;
- $\gamma_k \to \gamma$ 一致收敛;
- $D\gamma_k \to D\gamma$ 依测度 $\mathcal{L}^n$-a.e. 收敛;

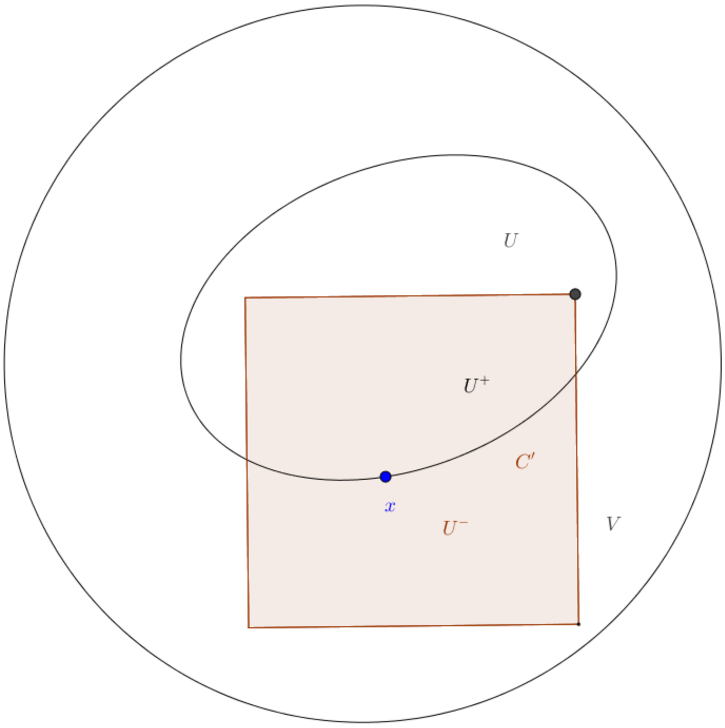


图 1.2: U^+ 与 U^-

- $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\|D\gamma_k\|_{L^\infty}<\infty$.

则对任意 $i\in\{1,\ldots,n-1\}$, 有

$$\begin{aligned}
\int_{U^-} f^-\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\,dy &= \int_{U^-} f(y',2\gamma(y')-y_n)\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\,dy\\
&= \lim_{k\to\infty}\int_{U^-} f(y',2\gamma_k(y')-y_n)\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\,dy\\
&= -\lim_{k\to\infty}\int_{U^-}\left[\frac{\partial f}{\partial y_i}(y',2\gamma_k(y')-y_n)+2\frac{\partial f}{\partial y_n}(y',2\gamma_k(y')-y_n)\frac{\partial \gamma_k}{\partial y_i}(y')\right]\varphi\,dy\\
&= -\int_{U^-}\left[\frac{\partial f}{\partial y_i}(y',2\gamma(y')-y_n)+2\frac{\partial f}{\partial y_n}(y',2\gamma(y')-y_n)\frac{\partial \gamma}{\partial y_i}(y')\right]\varphi\,dy.
\end{aligned}$$

类似地, 有

$$\int_{U^-} f^-\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\,dy=\int_{U^-}\frac{\partial f}{\partial y_n}(y',2\gamma(y')-y_n)\varphi\,dy.$$

利用 $\|D\gamma\|_{L^\infty}<\infty$, 得

$$\int_{U^-}|Df(y',2\gamma(y')-y_n)|^p\,dy\le C\int_U|Df|^p\,dy.$$

Step 3: 局部延拓算子. 定义延拓算子如下.

$$Ef:=\overline{f}:=\begin{cases} f^+, & x\in\overline{U}^+,\\ f^-, & x\in\overline{U}^-,\\ 0, & x\in\mathbb{R}^n\setminus(\overline{U}^+\cup\overline{U}^-).\end{cases}$$

易知 $\overline{f}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续, 且满足如下性质.

(a) $E(f) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\|E(f)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{W^{1,p}(U)}$;

(b) $\operatorname{supp}(Ef) \subset C' \subset V$.

事实上, 根据由 $\overline{U}^+ \cup \overline{U}^- = C'$, 易知 (b) 成立. 为证 (a), 设 $\varphi \in C_c^1(C')$, 对任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$, 应用迹定理, 以及 $T(f^+) = T(f^-)$ on ∂U, 知

$$\begin{aligned}
\int_{C'} \overline{f} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\, dy &= \int_{U^+} f^+ \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\, dy + \int_{U^-} f^- \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\, dy \\
&= -\int_{U^+} \frac{\partial}{\partial y_i} f^+ \varphi\, dy - \int_{U^-} \frac{\partial}{\partial y_i} f^- \varphi\, dy + \int_{\partial U} \left[T(f^+) - T(f^-)\right] \varphi \nu_i\, d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= -\int_{U^+} \frac{\partial}{\partial y_i} f^+ \varphi\, dy - \int_{U^-} \frac{\partial}{\partial y_i} f^- \varphi\, dy.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \overline{f} = \frac{\partial}{\partial y_i} f^+ \mathbf{1}_{U^+} + \frac{\partial}{\partial y_i} f^- \mathbf{1}_{U^-}.$$

因此, 根据 Step 2 中结论, 知 $E(f) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\|E(f)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{W^{1,p}(U)}$. 这说明 (a) 成立.

Step 4: 一般的情形. 假设 $f \in C^1(\overline{U})$ 且 $\operatorname{supp} f$ 不一定包含于 $C' \cap \overline{U}$. 此时由于 ∂U 紧, 知 ∂U 可被有限个开圆柱体 $C_k := C(x_k, r_k, h_k)$ 覆盖,($k \in \{1, \ldots, N\}$). 令 $\{\xi_k\}_{k=1}^N$ 为相关于圆柱体的单位分解, 对任意 $\xi_k f$, 类似于 Step 3 中操作, 定义延拓算子 $E(\xi_k f)$, 则利用 Step 3 中结论, 定义一般的延拓算子

$$E(f) := \sum_{k=1}^{N} E(\xi_k f) + \xi_0 f.$$

知 $E(f) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\|Ef\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{W^{1,p}(U)}$.

对一般的 $f \in W^{1,p}(U)$, 则取 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(U) \cap C^1(\overline{U})$ 满足 $f_k \to f \text{in } W^{1,p}(U)$, 并定义延拓算子

$$E(f) := \lim_{k\to\infty} E(f_k).$$

利用稠密性讨论, 知 Ef 即为所求延拓算子.